MINISTÉRIO DA DEFESA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

INTEL

SSLLV-7

Filtro Kalman

Lista de Membros

No.	Nome
1	RITTO
2	RIBEIRO

Sumário

1 Introdução

O Filtro de Kalman fundamentalmente utiliza de funções de estados do sistema medidas em tempo real e previsões com ruído destas mesmas funções, ou até mesmo de outras, para determinar com mais precisão a real descrição atual do sistema.

2 Breve resumo sobre os filtros

2.1 Média Móvel

No filtro média móvel, um ponto de um sinal filtrado será a média de um número definido de pontos antecessores. Quanto maior o valor de pontos atribuídos (ordem), mais atenuado será o ruído. Obeserve um exemplo genérico:

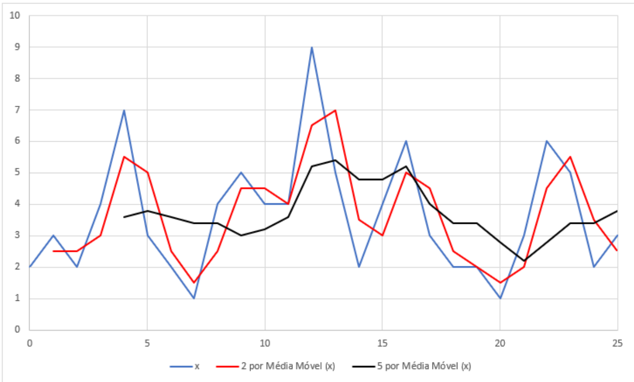

Figure 1: Filtro com diferentes ordens

2.2 Mediana

O filtro da mediana consiste em atribuir para cada ponto de um sinal o valor mediano para uma determinada janela utilizada. Quanto maior for o tamanho da janela utilizada, mais suavizado será o sinal original.

A filtragem mediana é muito utilizada no processamento digital de imagens porque, sob certas condições, preserva bordas enquanto remove ruídos, tendo também aplicações em processamento de sinais.

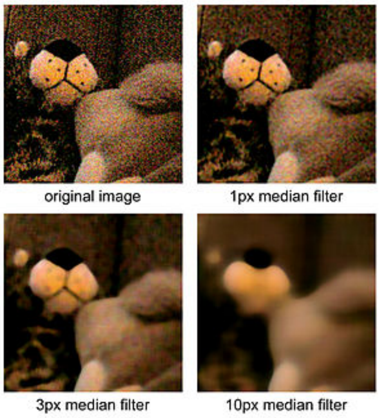

Figure 2: Exemplo de 3 filtros de mediana de raios variados

Considere um simples exemplo: Usando uma janela de 3 pontos com uma entrada imediatamente antes e depois de cada entrada, e limites preenchidos com zeros, um filtro mediano será aplicado ao seguinte sinal unidimensional simples:

$$x = (2, 3, 80, 6, 2, 3)$$

Este sinal tem entradas de valores pequenos, exceto uma entrada que é excepcionalmente alta e considerada um pico de ruído, e o objetivo é eliminá-la. Portanto, o sinal de saída filtrado mediana y será:

$$y = (2, 3, 6, 6, 3, 2)$$

Observe que o ruído foi eliminado e o sinal foi suavizado.

Por outro lado, o resultado de um filtro média móvel com a mesma largura de janela no mesmo conjunto de dados seria y = (1,7, 28,3, 29,7, 29,3, 3,7, 1,7). Pode-se observar que o pico de ruído infectou elementos vizinhos no sinal de média móvel e que o filtro da mediana teve um desempenho melhor para este tipo de ruído.

2.3 Moda

No filtro da moda, o ponto de um sinal filtrado será o valor mais frequente em uma determinada vizinhança, ou seja, a moda do seus vizinhos. O exemplo abaixo ilustra a aplicação de um filtro de moda em uma região de uma imagem digital.

Considere a imagem X apresentada abaixo. Aplicando-se à imagem X uma filtragem de moda , considerando-se vizinhança 8, obteremos a imagem Z de saída apresentada à direita.

120	100	100	100	80		100	100	120	100	80
95	255	120	0	80	»	95	120	100	80	80
120	110	80	100	80		110	120	110	100	90
X						**Z**				

Figure 3: Filtragem de moda

Uma observação interessante: O filtro da moda garante que o conjunto de valores digitais da imagem de saída é um subconjunto do domínio de valores da imagem de entrada. Assim, não são criados níveis digitais diferentes daqueles presentes na imagem de entrada.

3 Um caminho que leva a Kalman :)

3.1 Recursive Avarege

Suponha que tem-se k medidas de uma mesma variável X e se quer obter com precisão e eficiência computacional o valor médio a cada nova medição. É, como diria o grande Olavão, absolutamente desprovido do senso das proporções que se queria fazer a soma das k medidas e a divisão.

Vamos explorar um pouco a simples expressão da média aritmética e buscar uma recursão:

$\bar{X}_k = [\sum_{i=1}^{k} i]/k$
$\bar{X}_k.k = [\sum_{i=1}^{k} i]$ (I)

Vamos escrever também a expressão para X_{k-1}^{-}

$X_{k-1}^{-} = [\sum_{i=1}^{k-1} i]/(k-1)$
$X_{k-1}^{-}(k-1) = [\sum_{i=1}^{k-1} i]$ (II)

Pode-se substituir a II na I:

$\bar{X}_k.k = X_{k-1}^{-}(k-1) + X_k$

Chagamos na expressão desejada:

$\bar{X}_k = X_{k-1}^{-}\frac{k-1}{k} + \frac{X_k}{k}$ (III)

3.2 Moving Avarage Filter, estamos cada vez mais perto :)

A media recursiva que abordamos anteriormente diminui a complexidade no calculo porém não produz uma média móvel que se move de maneira satisfatória acompanhando uma medição com ruído (Gaussiano ou não).

Aqui, fundamentalmente, queremos expressar matematicamente uma média móvel tendo como base uma fonte de dados idêntica a nossa primeira média.

Dada uma medida com ruido, queremos uma média que se comporte dessa forma:

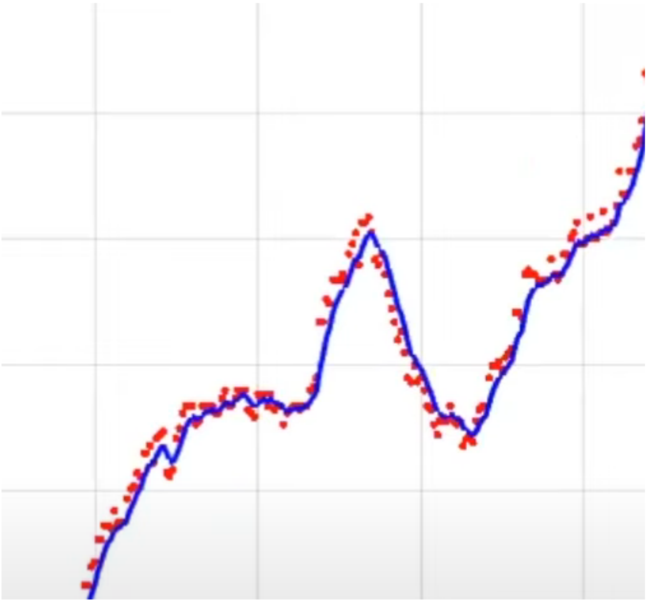

Figure 4: comportamento previsto

Para fazer isso, a ideia é uma construção parecida com a primeira, porém, de tal forma que se leve em conta no cálculo do apenas as ultimas n medições, isto é, $\{X_{n+1}, X_{n+2}, ..., X_{n+k}\}$.

$\bar{X}_k = [X_{K-n+1} + X_{k-n+2} + ... + X_k]/n$

Num procedimento idêntico ao realizado na primeira média, obtemos:

$\bar{X}_k = \bar{X_{k-1}} + \frac{X_k - X_{k-n}}{n}$

Esse era o filtro que queríamos, ou será que não :(...

Temos ainda um problema. Quanto maior tomamos o n, mais suave se torna a curva, o que definitivamente é bom num contexto de controle. Entretanto quanto maior é n, maior também será o atraso, o "delay" da média em relação aos pontos medidos. Esse Delay fica visível na imagem a seguir.

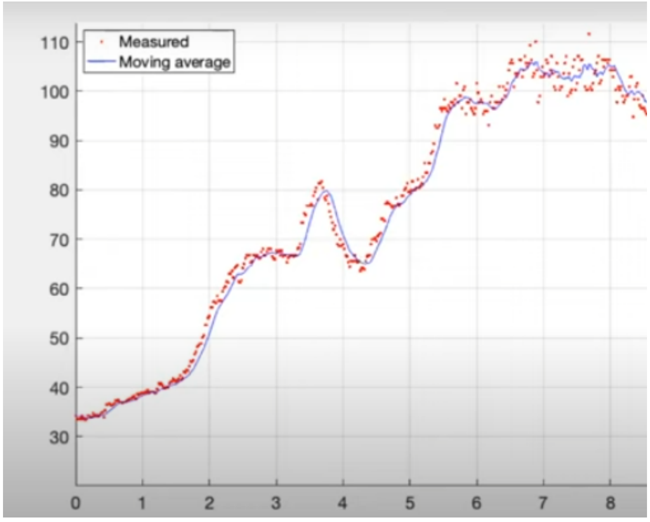

Figure 5: Média móvel

Vamos, meus nobres cavaleiros, andar mais um bucado em busca de Kalman, o caminho é longo, e os operários são poucos :|

3.3 Low Pass Filter

Filtra High-Frequencies (noise/ruído) e permite frequências baixas. Perceba que na média móvel:

$$\bar{X_k} = [X_{K-n+1} + X_{k-n+2} + ... + X_k]/n$$
$$\bar{X_k} = X_{K-n+1}/n + X_{k-n+2}/n + ... + X_k/n$$

Todo termo, independe do seu ruído associado, tem o mesmo peso $1/n$. Aqui vamos querer pesar os dados recentes com um mais do que 1/n.

3.3.1 1° order low pass filter

$$\bar{X_k} = \alpha \bar{X_{k-1}} + (1-\alpha)X_k$$
$$0 < \alpha < 1, \alpha = (k-1)/k$$

Esse filtro funciona de tal modo que os dados mais antigos pesam exponencialmente menos. Basta abrir um pouco a expressão utilizando a recorrência e isso ficará claro:

$$\bar{X_k} = \alpha^2 \bar{X_{k-2}} + \alpha(\alpha-1)X_{k-1} + (1-\alpha)X_k$$

Se tomarmos o mesmo exemplo anterior, a aplicarmos o nosso querido "1° order low pass filter" utilizando um $\alpha = 0,7$ temos algo mais ortodoxo, digamos :)

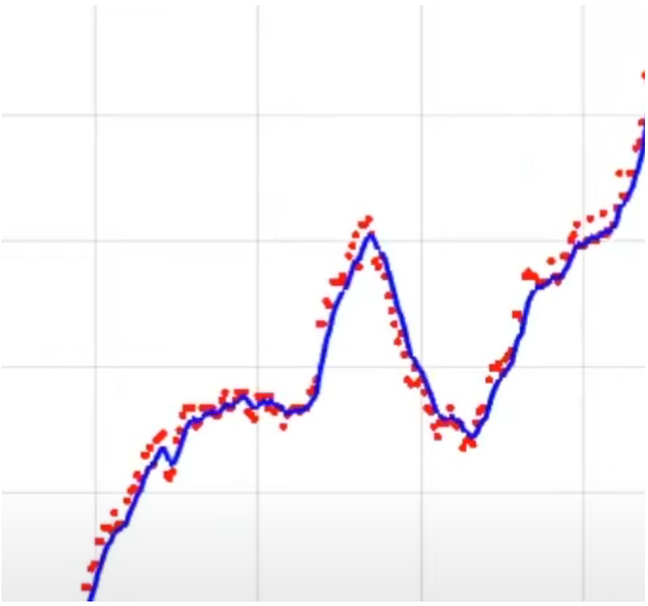

Figure 6: 1° order low pass filter, $\alpha = 0,7$

Se diminuimos o α que é o mesmo que atribuir um peso menor as medidas anteriores, vamos ter um filtro que gera uma curva com mais ruído. Ela varia mais com os pontos porém se o interesse for por exemplo realizar uma derivada e obter uma velocidade, vai haver muito mais variação que o necessário para se calcular com competência o comportamento de um objeto:

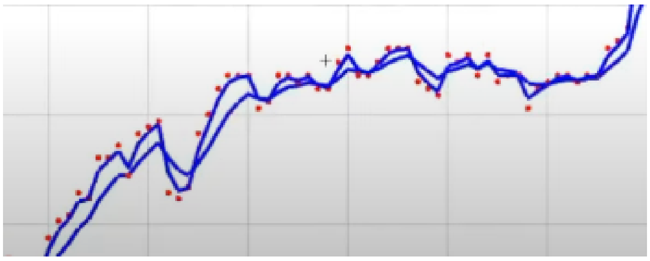

Figure 7: 1° order low pass filter, $\alpha = 0,3$

O filtro aplicado agora com $\alpha = 0.3$ tem uma variância maior do que desejávamos hahahahaah, imagine calcular a velocidade de um móvel baseado na derivada disso, esse móvel está se locomovendo de uma forma relativamente esquizofrênica :0

Vamos adiante, no que diz respeito a Filtros, ainda somos crianças, demos nossos primeiros passos, e o caminho é longo e ruidoso :)

4 Kalman a vista

A ideia é que no Kalman vamos utilizar algo parecido com o 1° order low pass filter, a diferença é que o α vai estar variando de acordo com o dado que introduzimos, temos um α dinâmico.

A grande questão agora e definir os parametros e calculo devido para de fato dar a tal "dinâmica" ao α :)

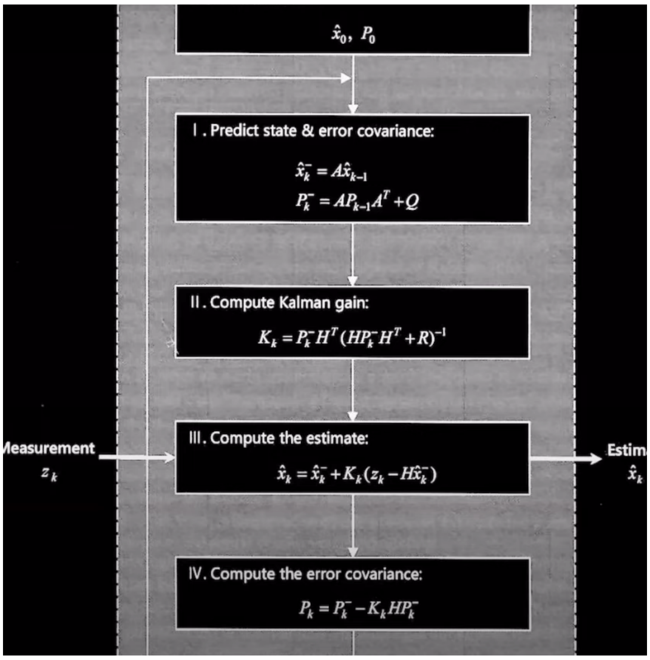

Figure 8: Algorítmo

Na notação usual Z_k é a k-ésima medição e $\hat{x}_k$ é a k-ésima estimativa. Perceba que a estimativa pode ser um estado diferente da medição, isto é, podemos por exemplo estar medindo a posição e estimando a velocidade, não precisam se tratar da mesma coisa, o que convenhamos, "é bão demais da conta sô".

A princípio é dificil entender que diacho ta sendo expresso nesse diagrama. Vamos com calma, um passo de cada vez até o bendito Kalman.

Temos no passo (I) uma etapa de predição (prediction), inclusive a notação embarca essa ideia, $\hat{x}_k^-$ na notação usual é a previsão de estado k baseada na k-1, o "-" na notação quer dizer previsão, x antes de de fato termos a medição. Temos também P_k^- é a covariância de erro prevista (medida de ruído/noise)

Temos no passo (II) uma etapa é o estimation step. VAmos usar um bucado de matriz aqui, bendita seja a gloriosa algebra linear.

Antes de continuar, temos aqui algumas terminologias importantes:

External input	z_k (measurement)
Final output	$\hat{x}_k$ (estimate)
System model	A, H, Q, R
For internal computation	$\hat{x}_k^-$, P_k^-, P_k, K_k

Figure 9: Terminologias recorrentes

4.1 Algorítmo

4.1.1 Estimation Step

Vamos lá, não sabemos o $x_k \in R^k$, temos na realidade uma estimativa dele, o tal $\hat{x}_k$, e também a convicção irrestrita de que $x_k \sim N(\hat{x}_k, P_k)$, isto é, com uma distribuição normal determinamos x_k. Vamos começar a esboçar as contas que importam:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

$H\hat{x}_k^-$ é a "predict measuremant" e Z_k é medida real, $(z_k - H\hat{x}_k^-)$ temos portanto a diferença entre as duas.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k z_k - K_k H\hat{x}_k^- \ \hat{x}_k = (I - Z_k H)\hat{x}_k^- + K_k Z_k$$

De agora em diante, vamos tomar $H = I$ só quero mostrar algo fascinante. O argumento seria válido se nosso H nao fosse a identidade.

$$\hat{x}_k = (1 - Z_k)\hat{x}_k^- + K_k Z_k$$

Se substituirmos α:

$$\hat{x}_k = \alpha\hat{x}_k^- + (1 - \alpha)Z_k$$

Veja se não parece o nosso querido amigo 1° order low pass filter, de fato o Kalman Filter se assemelha e muito com um 1° order low pass filter com α sendo dinâmico, pronto, estou satisfeito com esse interlúdio, queria mostrar isso mesmo :)
Aqui não precisamos escolher o α Kalman o faz por nós de forma dinâmica, seguindo a expressão:

$$K_k = P_{\bar{k}} H^T (H P_{\bar{k}} H^T + R)^{-1}$$

O "error covariance" também recebe um update a cada iteração:

$$P_k = P_{\bar{k}} - K_k H P_{\bar{k}}$$

Perceba que as matrizes H e R só aparecem no "estimation step".

4.1.2 prediction step

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\hat{\mathrm{x}}_{k+1}^{-} = A\hat{\mathrm{x}}_k$$

Tem-se a expresão para a previsão da covariância:

$P_{k+1}^{-} = AP_kA^T + Q$

Q é usualmente chamado de "process noise". Note que Q e A só aparecem no "prediction step"

4.1.3 Como "estimation" e "prediction" se juntam?

Em algorítmos mais simples, como o "1° order low pass filter" baseado em médias móveis, fundamentalmente o que temos é:

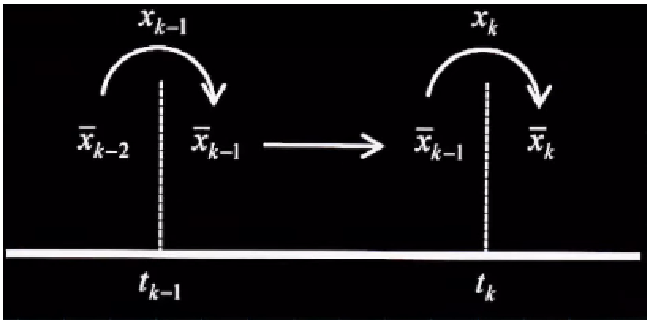

Figure 10: Relação entre estimativa e medição no algorítmo 1° order low pass filter

Agora no Kalman, nossa variável estimada não precisa ser igual à variável medida. Retomemos as seguintes expressões:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$
$$\hat{x}_{k+1}^- = A\hat{x}_k$$

Substituindo $\hat{x}_{k+1}^-$ na primeira expressão

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_k + K_k(z_k - HA\hat{x}_k)$$

Com essa expressão em mãos fica mais intuitivo interpretar o diagrama que mostra como o "estimation step" e o "prediction step" se relacionam.

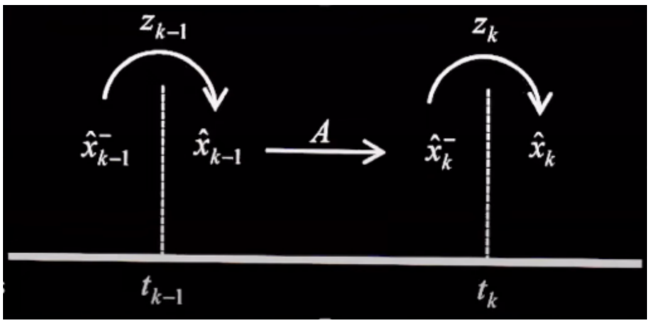

Figure 11: Relação entre "estimation step" e "prediction step" no filtro Kalman

Fundamentalmente o que nos falta é entender em termos concretos as matrizes A, H, Q e R. Isso, porém, meus nobres cavaleiros que tão longe chegaram, deve ser expresso puramente em termos matemáticos e o conjunto dessas matrizes é chamado de Modelo do sistema (System Model). Essa discrição nobres cavaleiros que tão longe chegaram, fica para nossa amada matemática :)